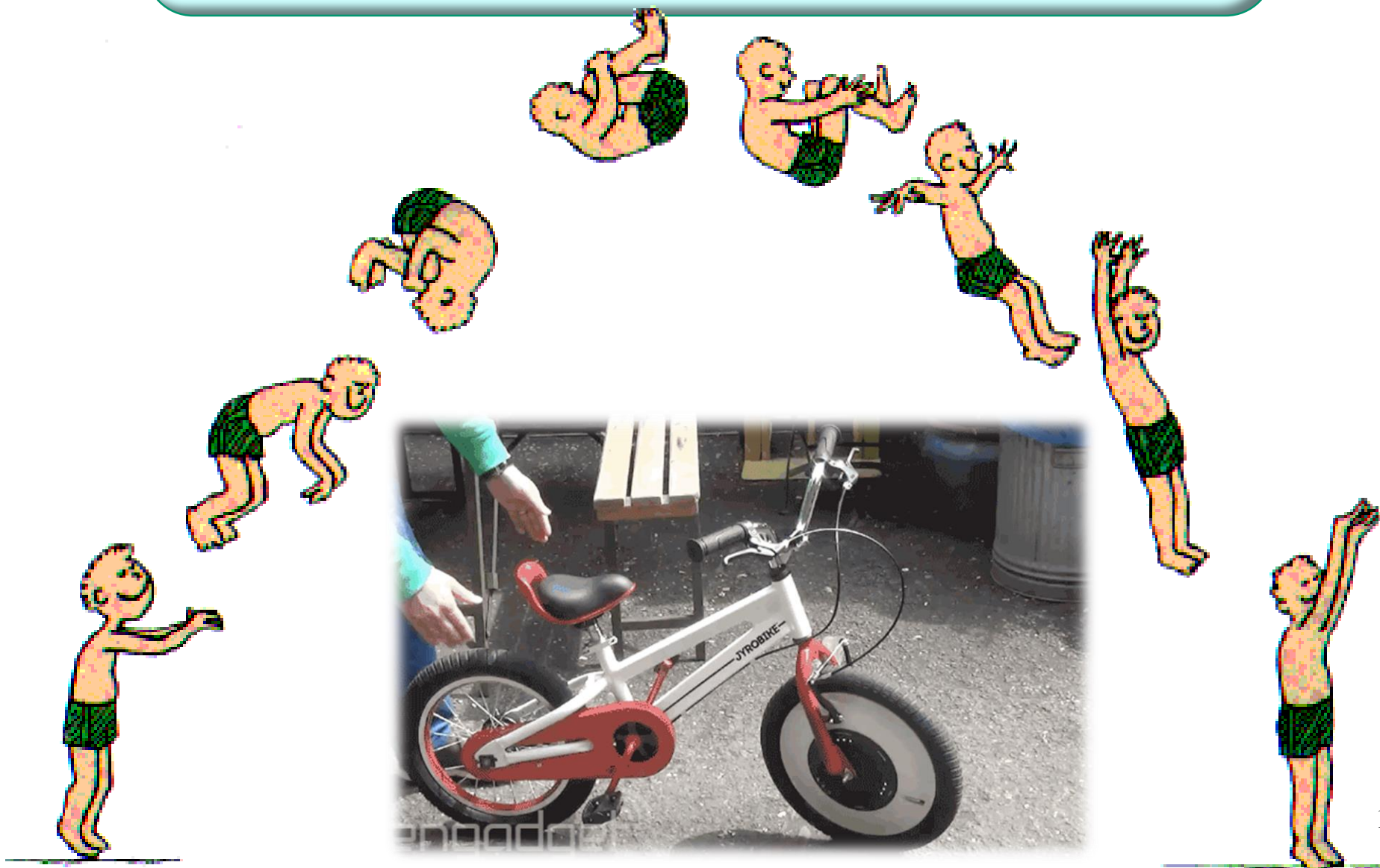
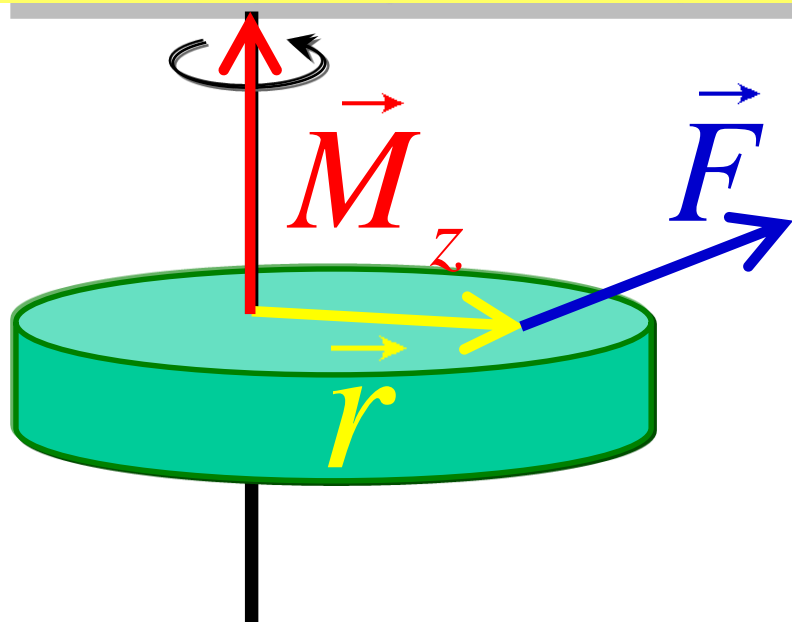


§ 5.5 角动量守恒



1. 定轴转动的角动量定理



$$M_z = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt}$$

$$M_z dt = J d\omega$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M_z dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J d\omega$$

角冲量
(冲量矩)

$$\int_{t_1}^{t_2} M_z dt = J\omega_2 - J\omega_1$$

角动量
增量

➤ 定轴转动刚体对轴的角动量增量等于对同一转轴合外力矩的角冲量（或冲量矩）。

2. 定轴转动的角动量守恒

$$\int_{t_1}^{t_2} M_z dt = J\omega_2 - J\omega_1$$

若 $\sum \vec{M}_z = 0$, 则 $J\omega_2 = J\omega_1 = C$

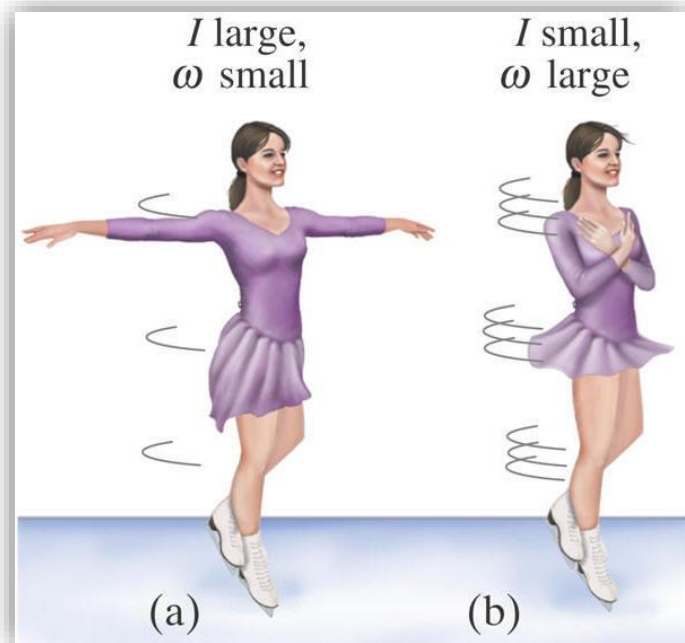
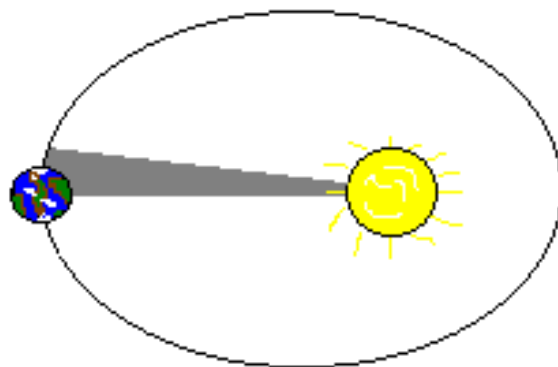
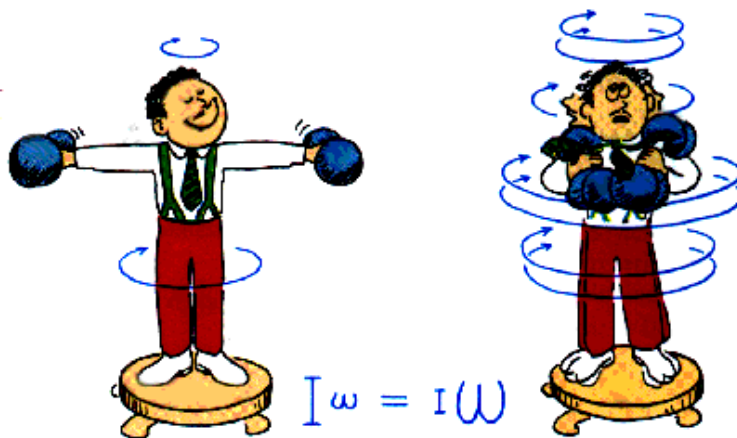
➤ 定轴转动的角动量守恒定律

若定轴转动的刚体所受对转轴的合外力矩恒为零, 则刚体对该轴的角动量保持不变.

$$\sum M_z = 0$$

$$L_z = J_z \omega = C$$

J 改变, 则 ω 改变;

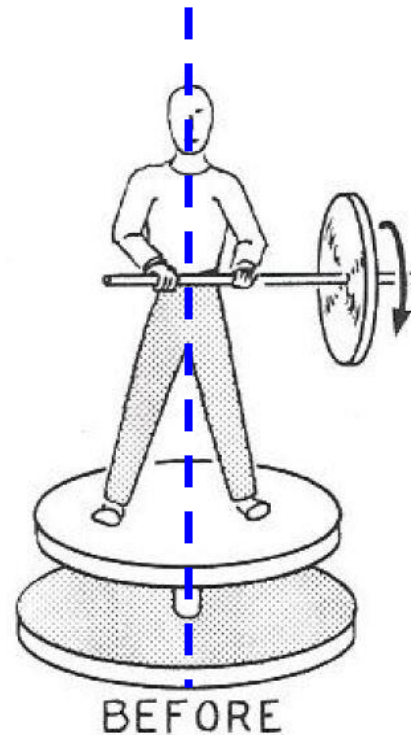




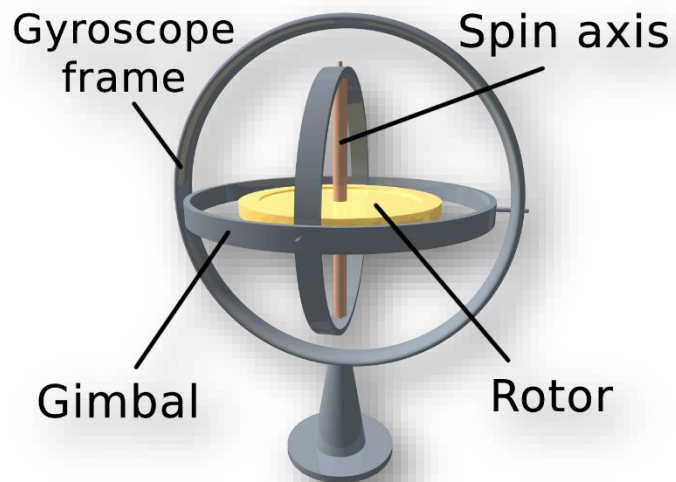
$$\sum M_z = 0, \quad J\omega = 0$$

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = 0$$

一部分转动，另一部分反转



◆ 陀螺的定轴性



$$\sum M_z = 0, J\omega = C,$$

J 不变, 则 ω 不变

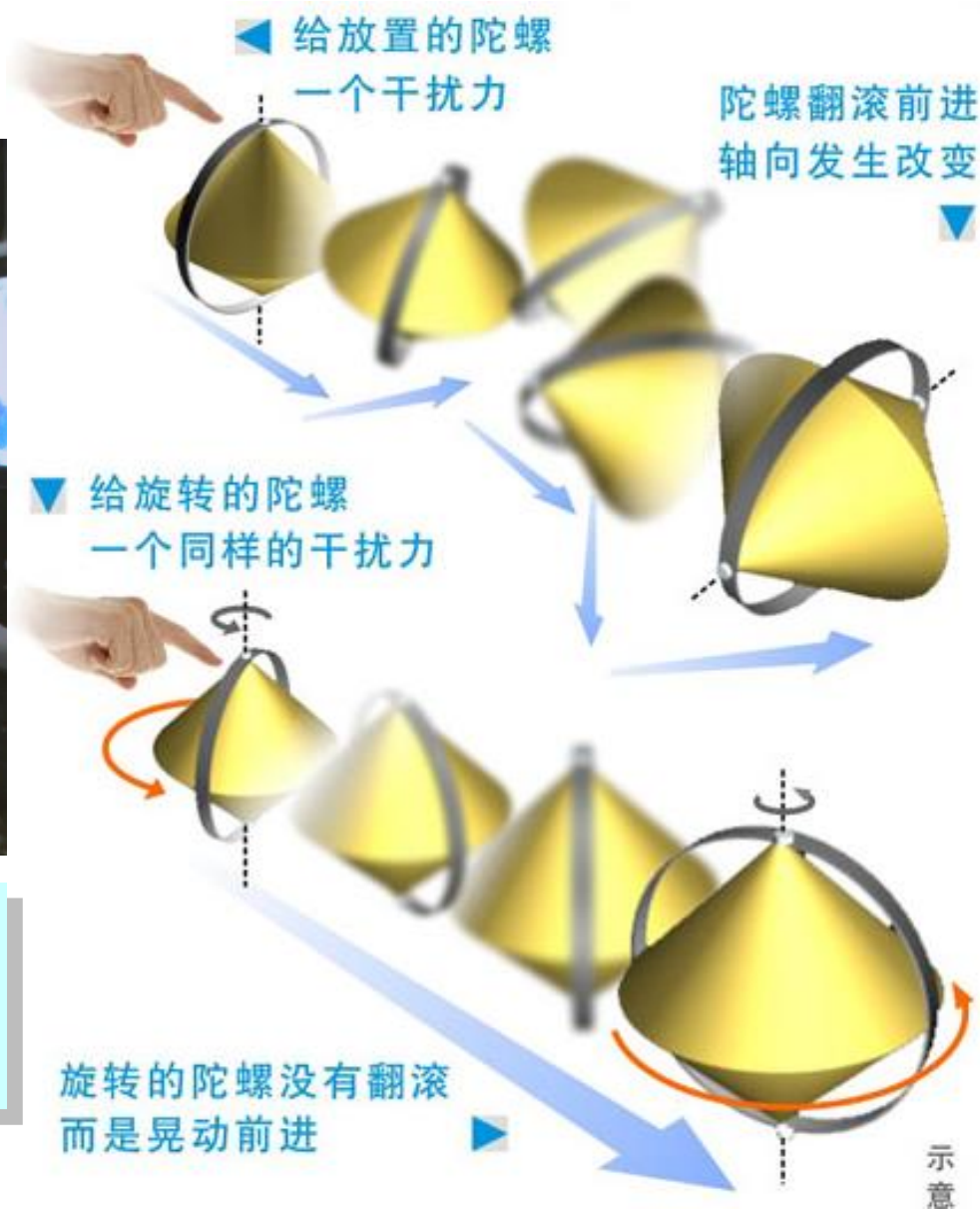
常平架上的回转仪能够保持其角动量不变。



◆ 陀螺的定轴性



转动的陀螺具有定轴性，
遵守角动量守恒定律。



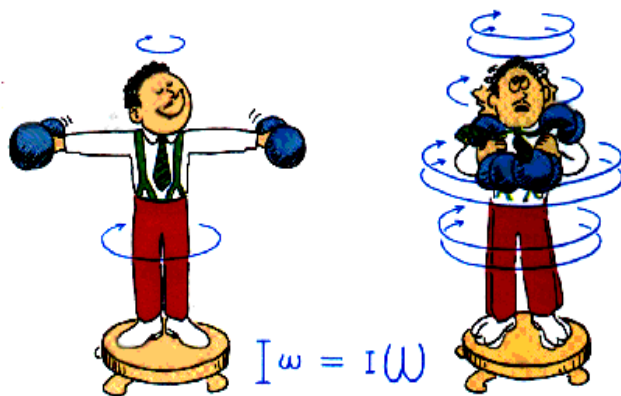
若 $\sum \vec{M}_z = 0$, 则 $J\omega_2 = J\omega_1 = C$

➤ 定轴转动角动量守恒

若定轴转动的刚体所受对转轴的合外力矩恒为零，则刚体对该轴的角动量保持不变。

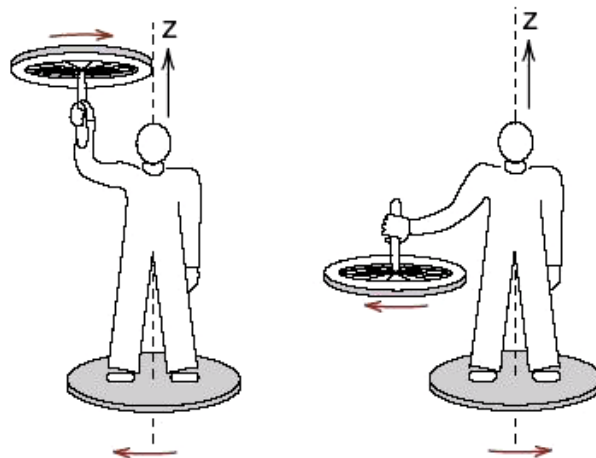
$$J\omega = C$$

J 改变, ω 改变



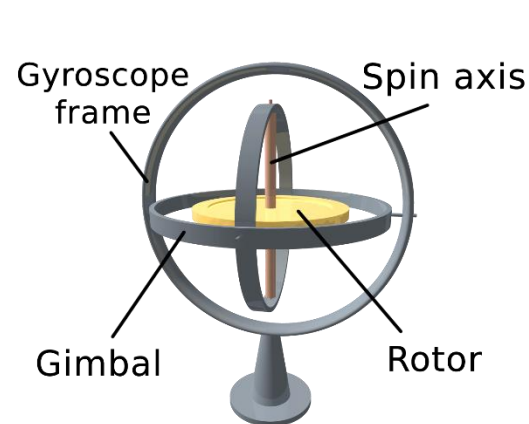
$$J\omega = 0$$

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = 0$$

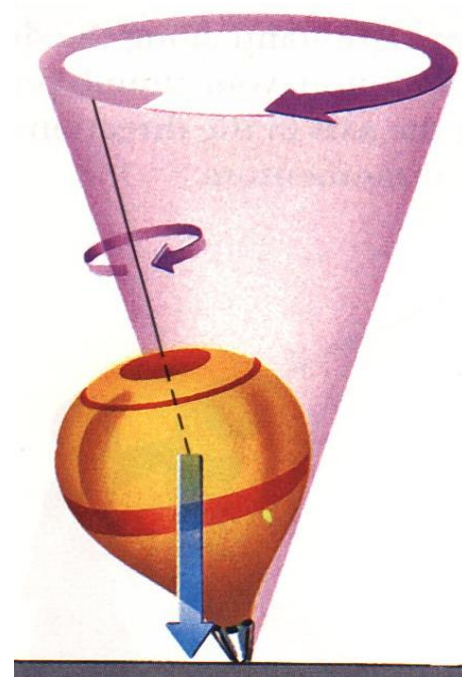
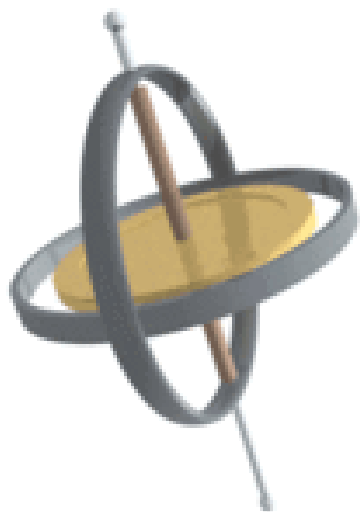


$$J\omega = C$$

J 不变, ω 不变

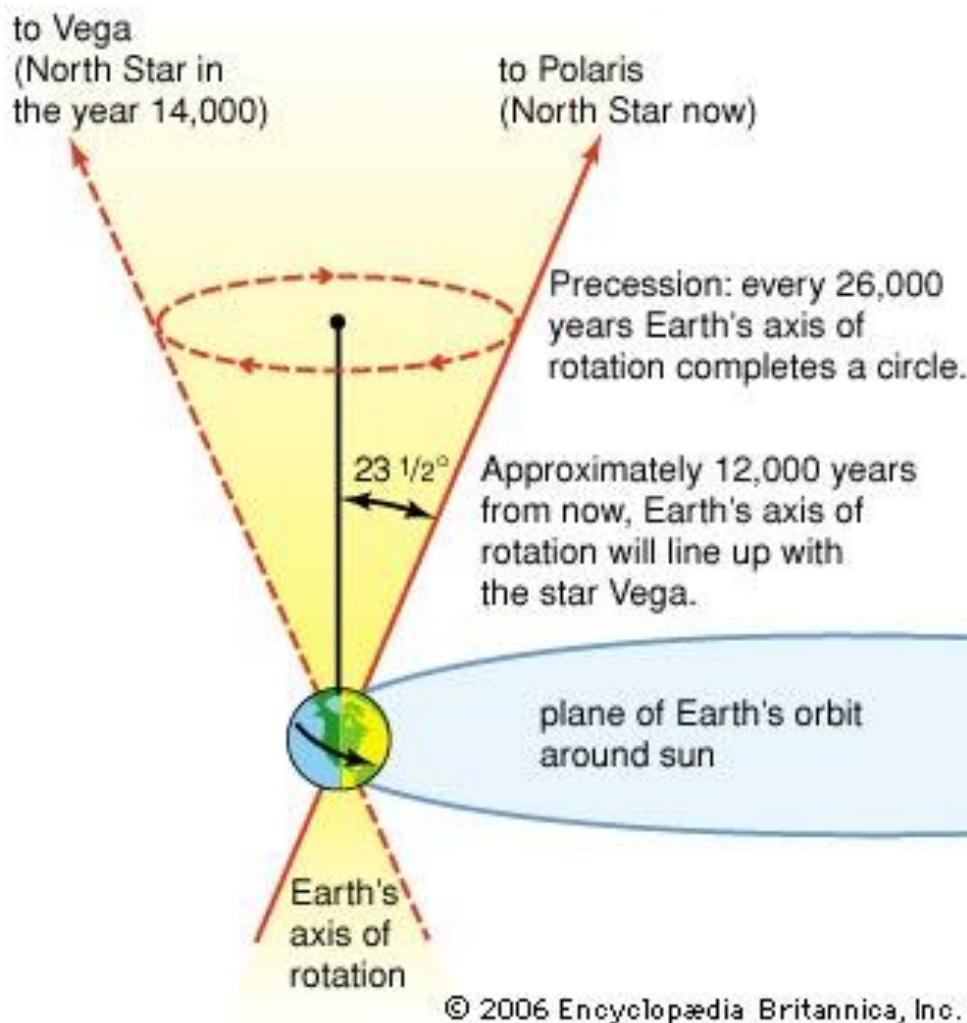


◆ 进动(旋进)



例如：重力的力矩导致陀螺的进动（旋进）。

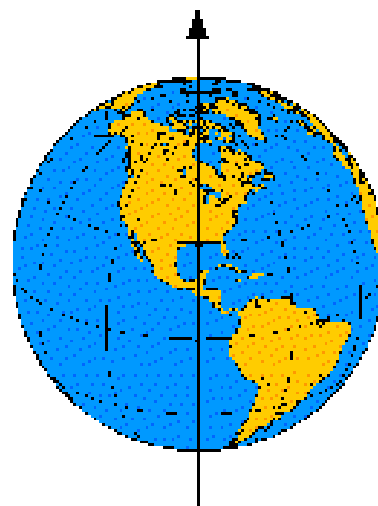
◆ 地球的进动



来自于太阳和月亮的引力产生的力矩使地球的自转轴产生进动。

进动导致地球北极每25780年在天空中扫过一个巨大的锥体。

因此，北极并非总是指向北方。



小结

刚体对定轴的角动量

$$L_z = J_z \omega$$

$$J_z = \int r^2 dm$$

对定轴的角动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} M_z dt = J \omega_2 - J \omega_1$$

对定轴的角动量守恒

$$\sum M_{z,ext} = 0$$

$$L_z = J \omega = C$$

- 仅对于同一个转轴，定轴转动的角动量定理或角动量守恒定律才适用。
- 对定轴的角动量守恒定律对于一个或多个刚体均适用；

§ 5.6 转动中的功和能

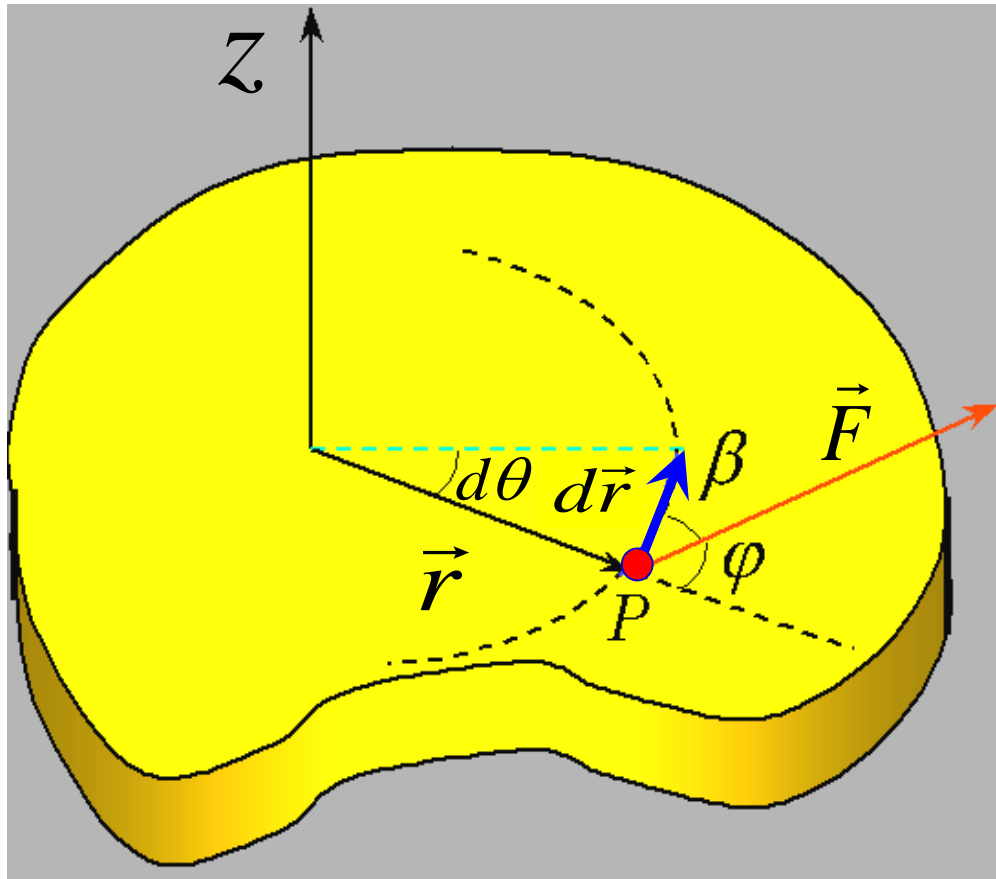


1. 力矩的功

作用于质点的元功：

$$dA = Md\theta$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \beta \, r d\theta = F \sin \varphi \, r d\theta$$



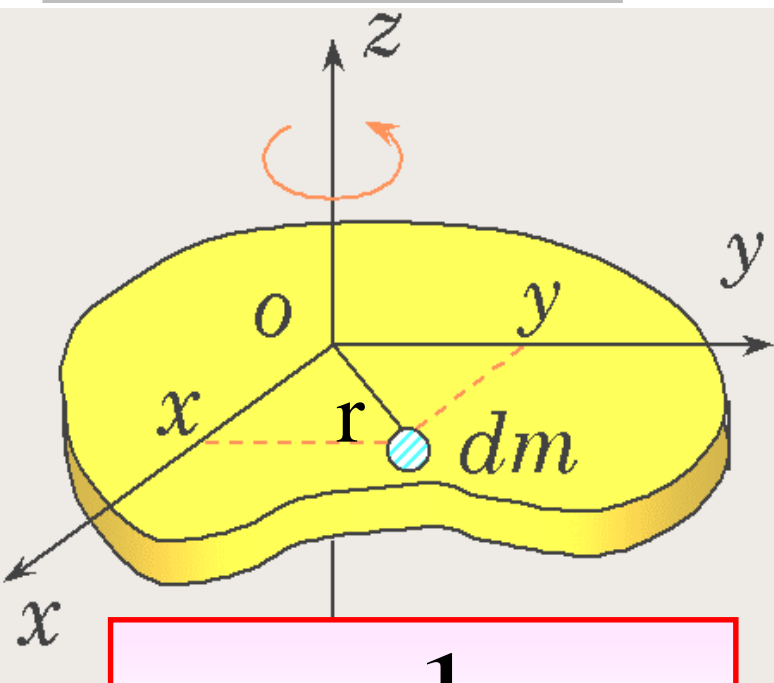
作用于刚体的总功：

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

在转动问题中：

外力的功=外力矩的功

2. 转动动能



$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

刚体总动能:

质元 dm 的动能:

$$dE_k = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$

刚体转动的总动能:

$$E_k = \int \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int r^2 dm \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

3. 定轴转动的动能定理

刚体定轴转动定律: $M = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt}$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J \frac{d\omega}{dt} d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \omega d\omega$$

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 = E_{k2} - E_{k1}$$

- 合外力矩使刚体转动所作的功，等于刚体转动动能的增量.
- 注意: M 、 J 、 ω 均相对于同一转轴而言.

4. 刚体的势能

- 1) 只有存在保守力时才能定义势能；
- 2) 刚体的势能为所有质元势能的和；
- 3) 刚体在地面附近的重力势能：

$$E_p = \sum \Delta m_i g h_i = g \sum \Delta m_i h_i$$

质心的高度： $h_c = (\sum \Delta m_i h_i) / m$

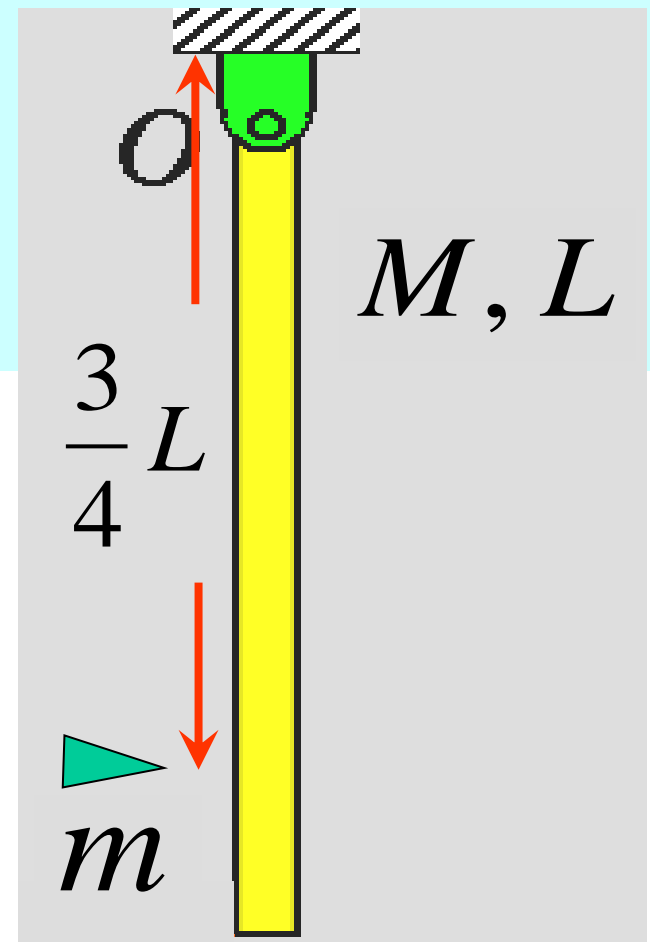
$$E_p = mgh_c$$

- 刚体的重力势能等于质心势能。

例1. 一质量均匀的细杆，长度为 $L=0.4\text{m}$ ，质量为 $M=1.0\text{kg}$ ，细杆可绕过其一端且无摩擦的转轴转动。一质量为 $m=8.0\text{g}$ 的子弹以 $v=200\text{m/s}$ 的速率射向细杆距离转轴 $(3/4)L$ 处并嵌在其中。

求：

1. 射入后瞬间杆的角速度。
2. 杆的最大摆角。



(1) 对于杆、子弹、地球构成的系统，相对于 O 点（即转轴）无外力矩的作用，系统对于 O 点（即转轴）的角动量守恒。

$$mv \cdot \frac{3}{4}L = \frac{1}{3}ML^2\omega + m\left(\frac{3L}{4}\right)^2\omega$$

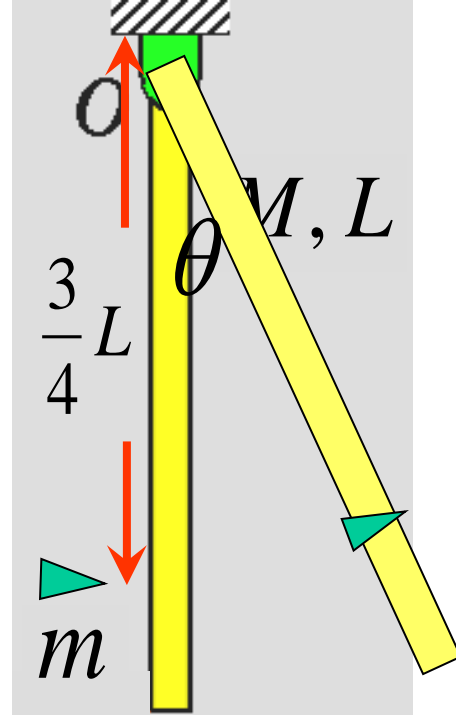
入射前子弹

入射后杆

入射后子弹

$$\therefore \omega = 8.89 \text{ rad/s}$$

(2) 系统机械能守恒，取 $\theta=0$ 时的势能为零。



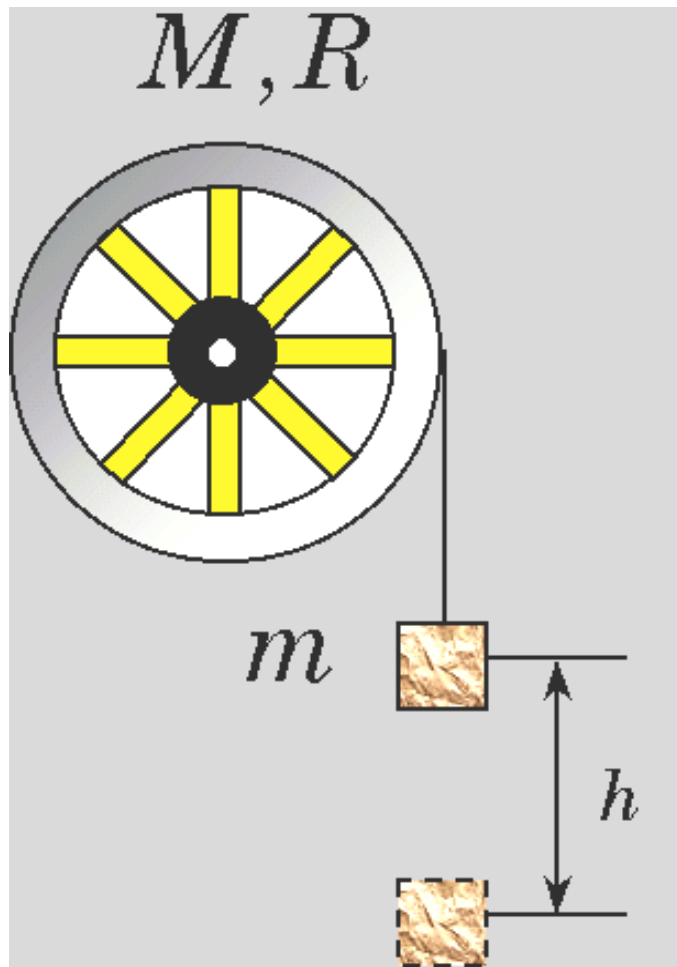
$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{3L}{4}\right)^2 \right] \omega^2 + 0 = 0 + \left(Mg \frac{L}{2} + mg \frac{3L}{4} \right) (1 - \cos \theta)$$

初态 $\theta=0$ ，子弹入射后瞬间的机械能

末态 θ 角时的机械能

$$\theta = 94^\circ 18'$$

例2. 质量为 M 的滑轮下挂一质量为 m 的木块。轻绳在滑轮上无滑动，木块从静止开始下落距离 h ，求木块的速率。



系统：滑轮、木块、地球

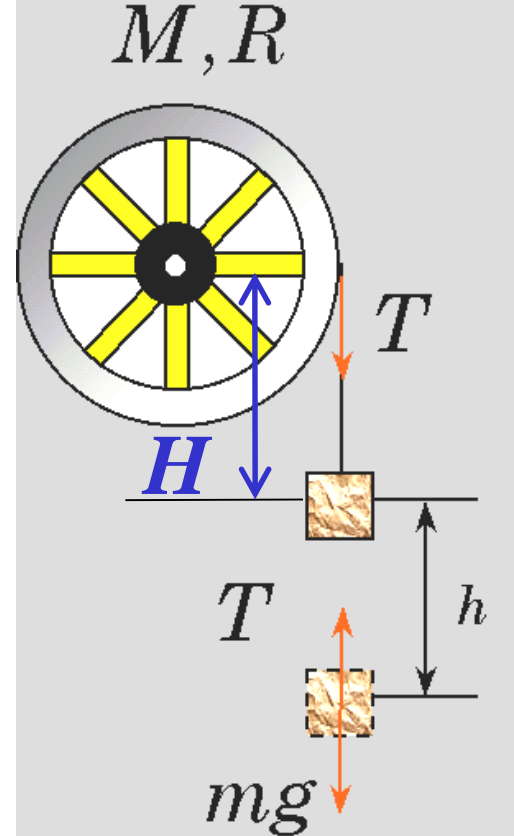
外力：轮轴的支持力

内力：重力（保守力）

机械能：守恒

势能零点：木块 m 的初始高度

初态—— $E_M + E_m = E_M + E_m$ ——末态

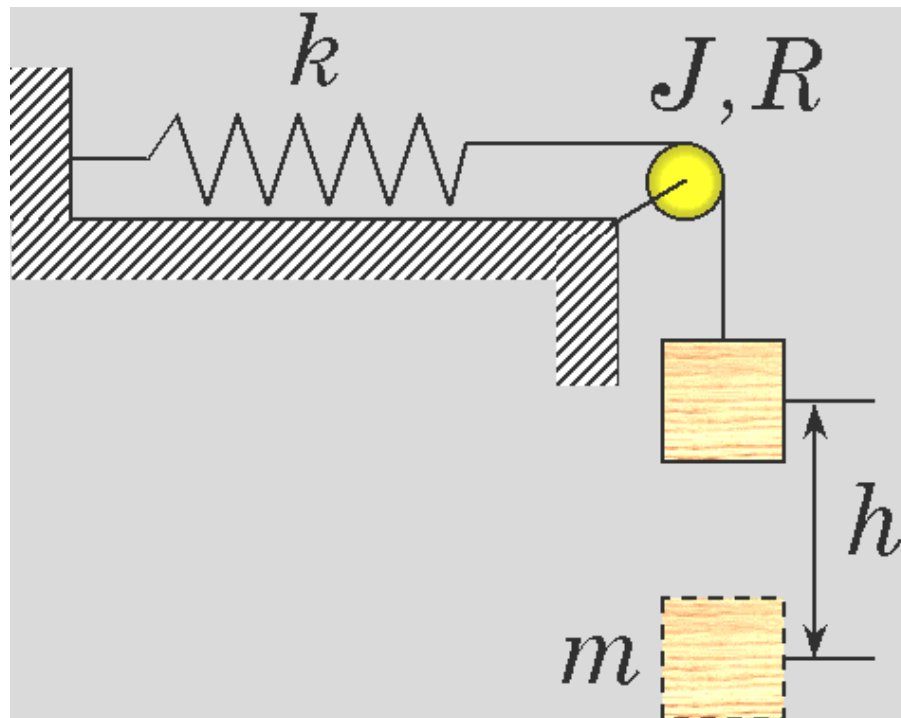


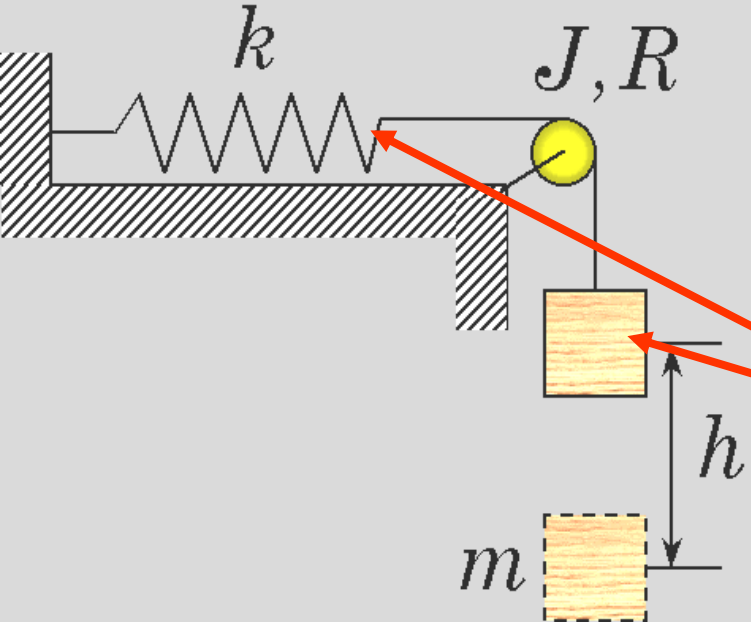
$$(0 + MgH) + (0 + 0) = \left(\frac{1}{2} J \omega^2 + MgH \right) + \left(\frac{1}{2} mv^2 - mgh \right)$$

$$\because \omega = \frac{v}{R}, \quad J = \frac{1}{2} MR^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m + M}}$$

例3. 轻质弹簧的倔强系数为 k ，一端固定在墙上，另一端通过定滑轮悬挂一木块，在弹簧自然长度时放开木块. 定滑轮质量为 M ，半径为 R . 求木块下落 h 时的速度.





弹簧，滑轮、木块和地球的系统只有保守力做功，故系统的机械能守恒.

重力势能和弹性势能的势能零点

$$0 + E_{p,pulley} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 - mgh + E_{p,pulley} + \frac{1}{2}kh^2$$

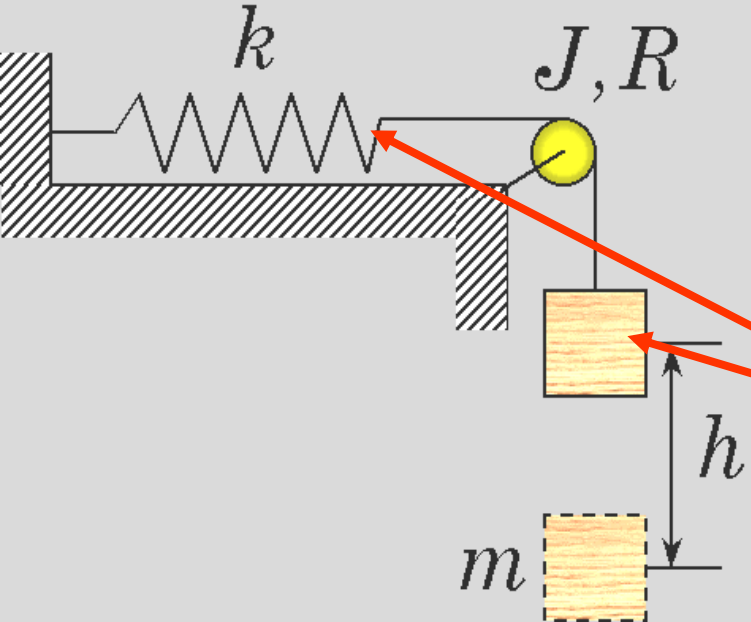
初态机械能

末态动能

末态势能

$$\because \omega = \frac{v}{R}, \quad J = \frac{1}{2}MR^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh - kh^2}{m + M/2}}$$



弹簧，滑轮、木块和地球的系统只有保守力做功，故系统的机械能守恒.

重力势能和弹性势能的势能零点

$$0 + E_{p,pulley} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 - mgh + E_{p,pulley} + \frac{1}{2}kh^2$$

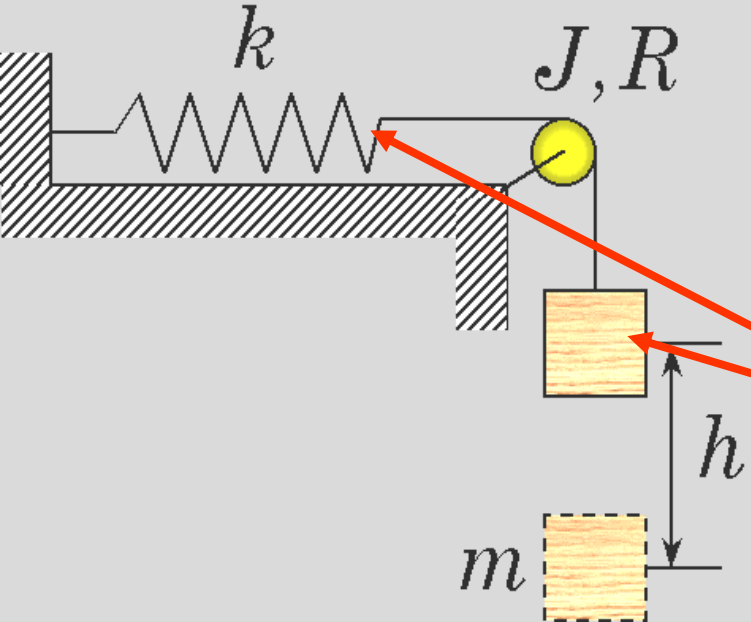
初态机械能

末态动能

末态势能

$$\because \omega = \frac{v}{R}, \quad J = \frac{1}{2}MR^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh - kh^2}{m + M/2}}$$



弹簧，滑轮、木块和地球的系统只有保守力做功，故系统的机械能守恒.

重力势能和弹性势能的势能零点

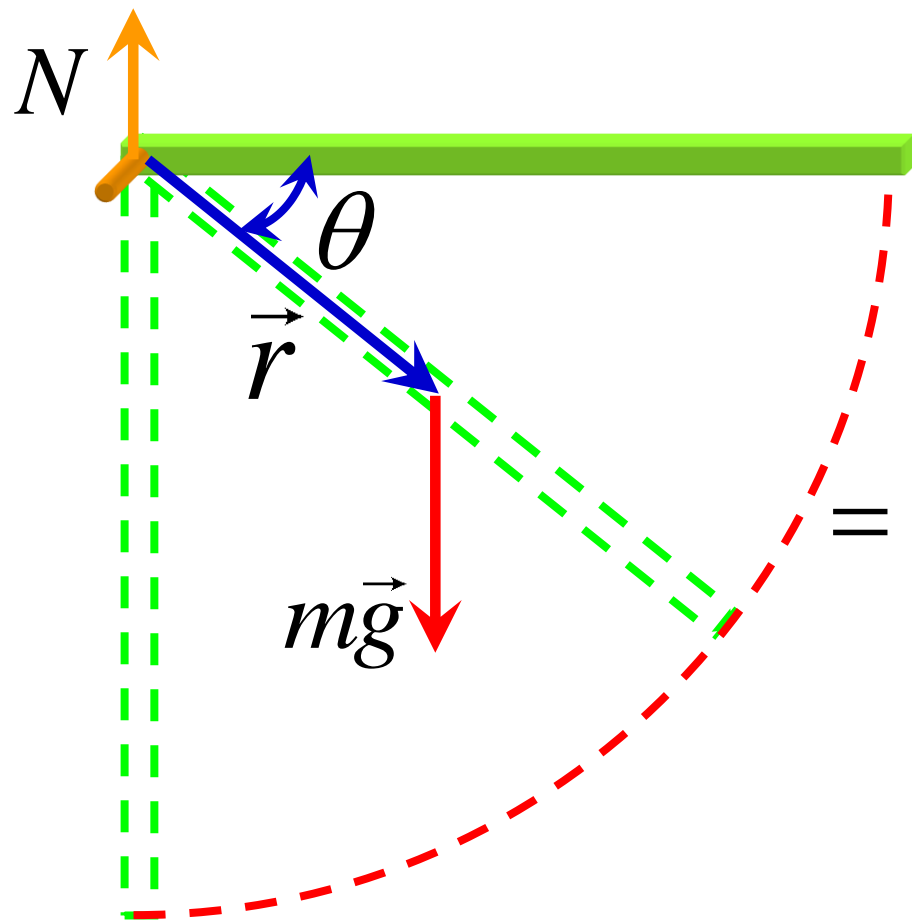
$$0 + E_{p,pulley} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 - mgh + E_{p,pulley} + \frac{1}{2}kh^2$$

初态机械能 末态动能 末态势能

$$\because \omega = \frac{v}{R}, \quad J = \frac{1}{2}MR^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh - kh^2}{m + M/2}}$$

例4. 一细杆的质量为 m ，长为 L ，一端支以枢轴而能自由旋转，设此杆自水平静止释放。求当杆经过铅直位置时的角速度。

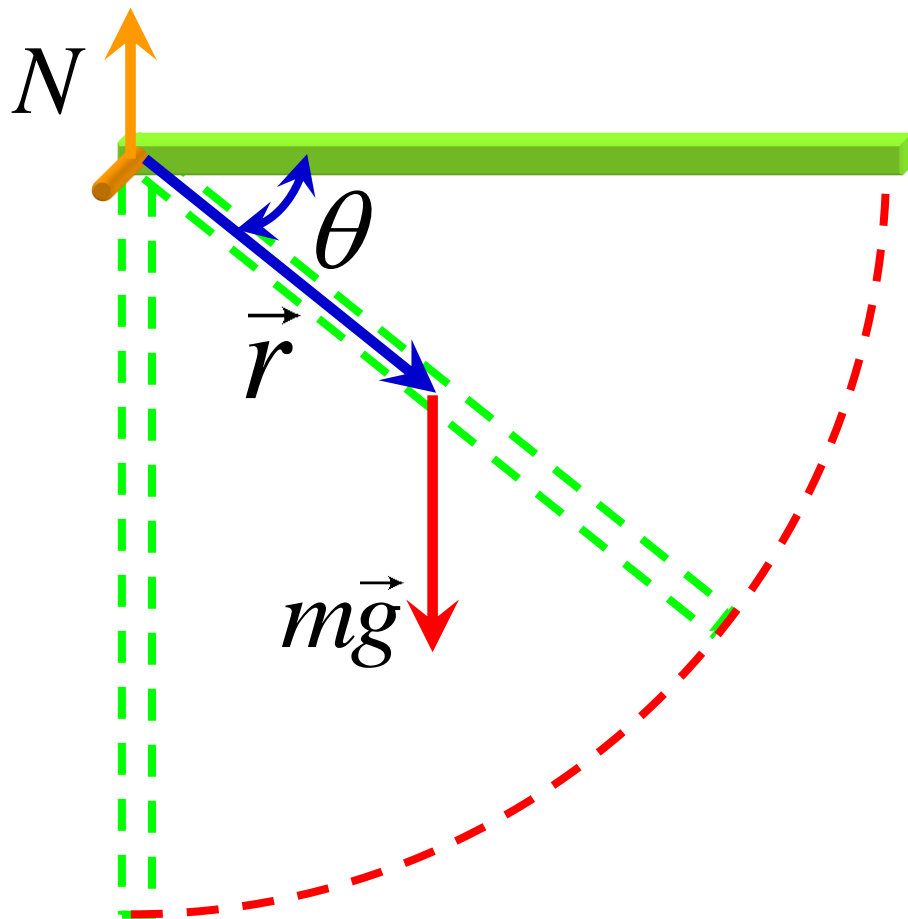


解：重力矩做功

$$A_{\text{力矩}} = \int_0^{\pi/2} M d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} mg \frac{L}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta$$

$$A_{\text{力矩}} = mg \frac{L}{2}$$



$$A_{\text{力矩}} = mg \frac{L}{2}$$

根据动能定理:

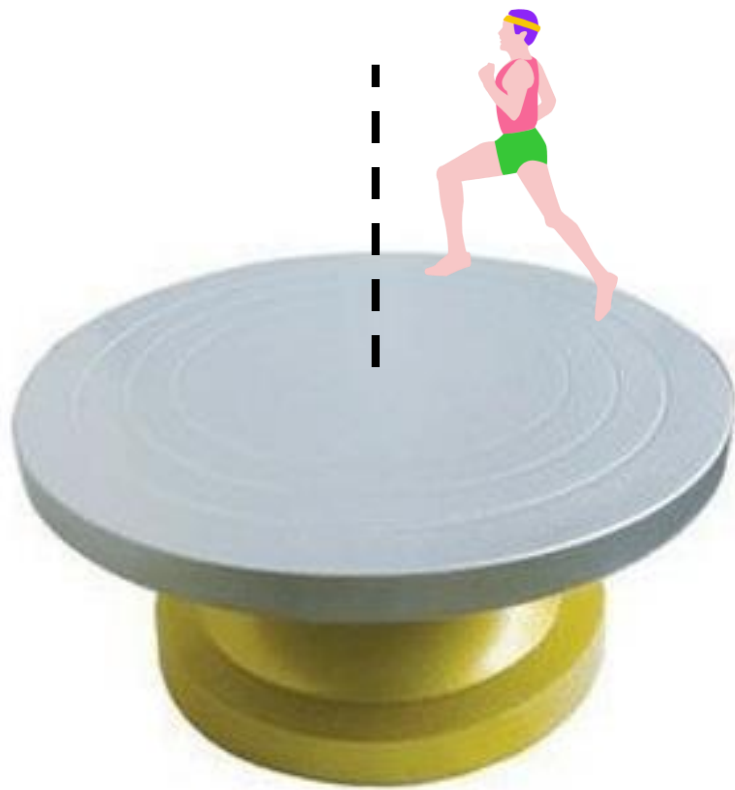
$$A_{\text{力矩}} = \frac{1}{2} J \omega^2 - \frac{1}{2} J \omega_0^2$$

$$mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{mgL}{J}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2/3}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

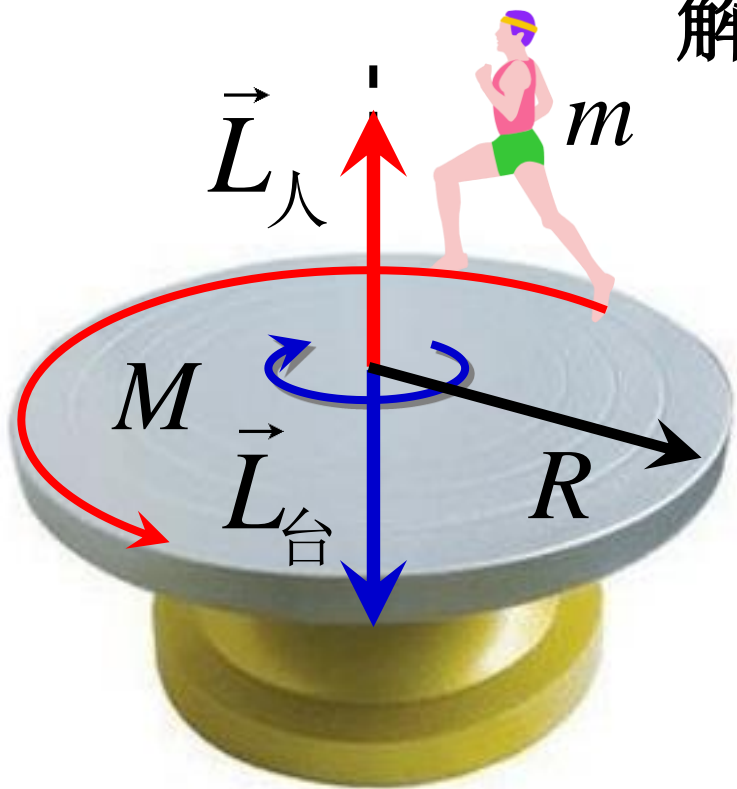
亦可利用机械能守恒求解

例5. 质量为 M ，半径为 R 的转台，可绕通过中心的竖直轴转动。质量为 m 的人站在边沿上，人和转台原来都静止。如果人沿转台边缘奔跑一周，求对地而言，人和转台各转动了多少角度？



解：对于人和转台组成的系统，相对于转轴无外力矩的作用，故系统对于该转轴的角动量守恒，且原来都静止

$$\vec{M}_{\text{外}}=0, \quad \vec{L}_{\text{人}}+\vec{L}_{\text{台}}=0$$



解: $\vec{M}_{\text{外}} = 0, \quad \vec{L}_{\text{人}} + \vec{L}_{\text{台}} = 0$

$$J_{\text{人}} \omega_{\text{人}} + J_{\text{台}} \omega_{\text{台}} = 0$$

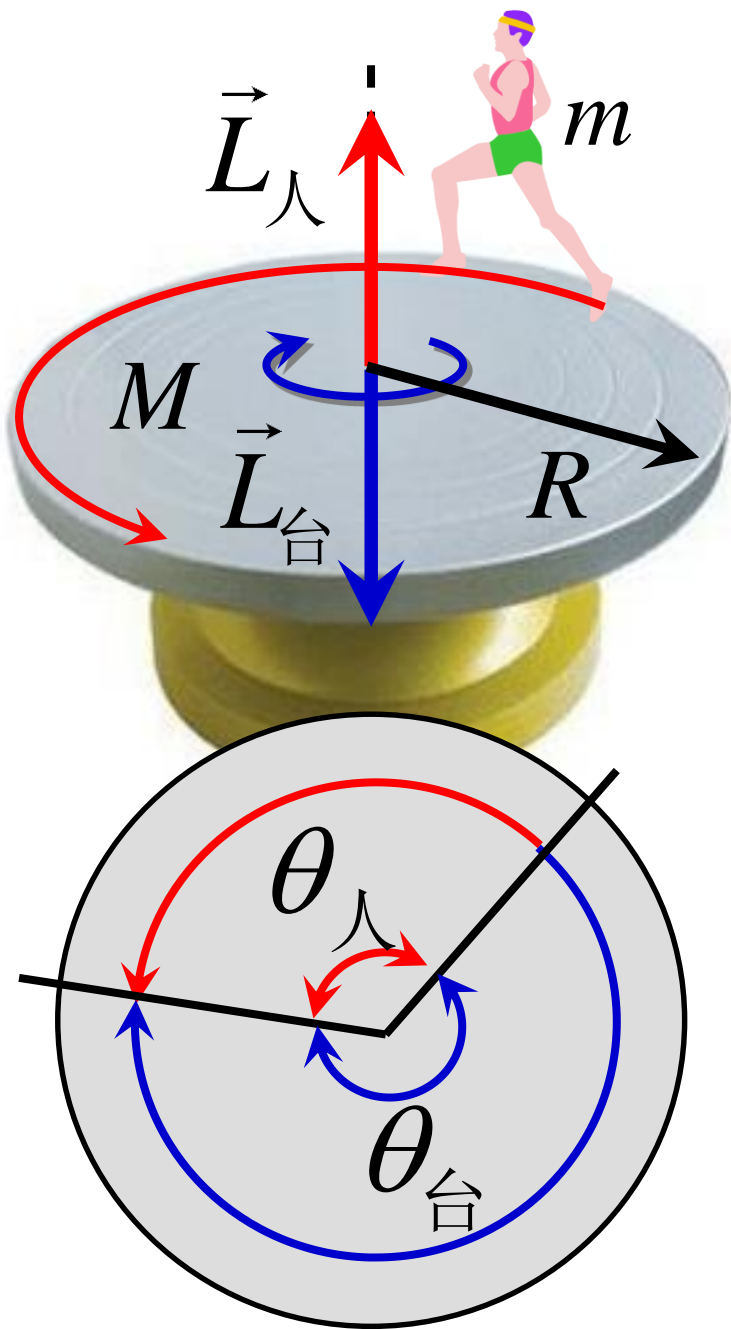
$$mR^2 \omega_{\text{人}} + \frac{1}{2} MR^2 \omega_{\text{台}} = 0$$

$$\omega_{\text{人}} = -\frac{M}{2m} \omega_{\text{台}}$$

对时间积分:

$$\int_0^t \omega_{\text{人}} dt = -\frac{M}{2m} \int_0^t \omega_{\text{台}} dt$$

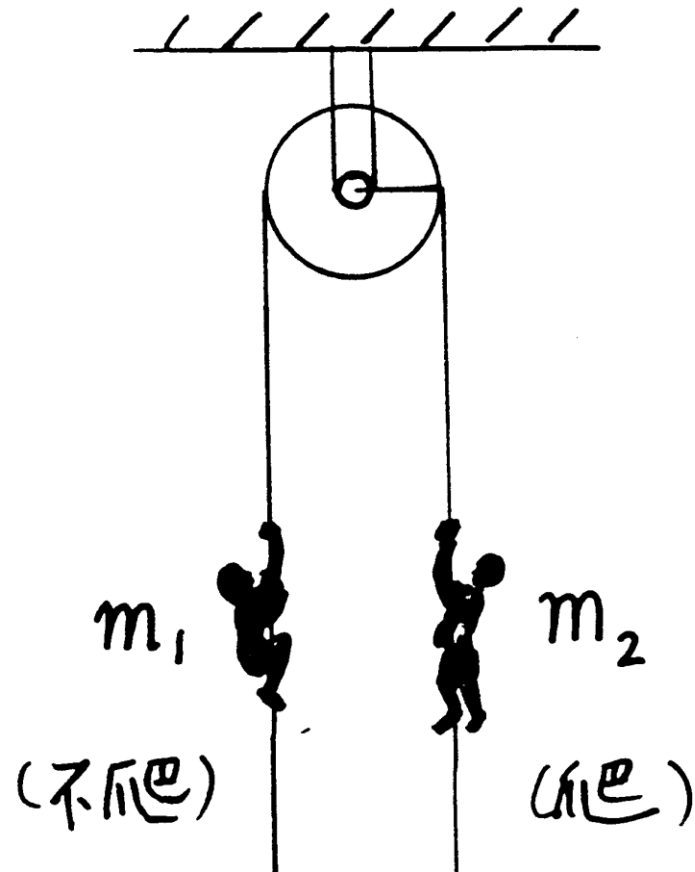
$$\theta_{\text{人}} = -\frac{M}{2m} \theta_{\text{台}}$$

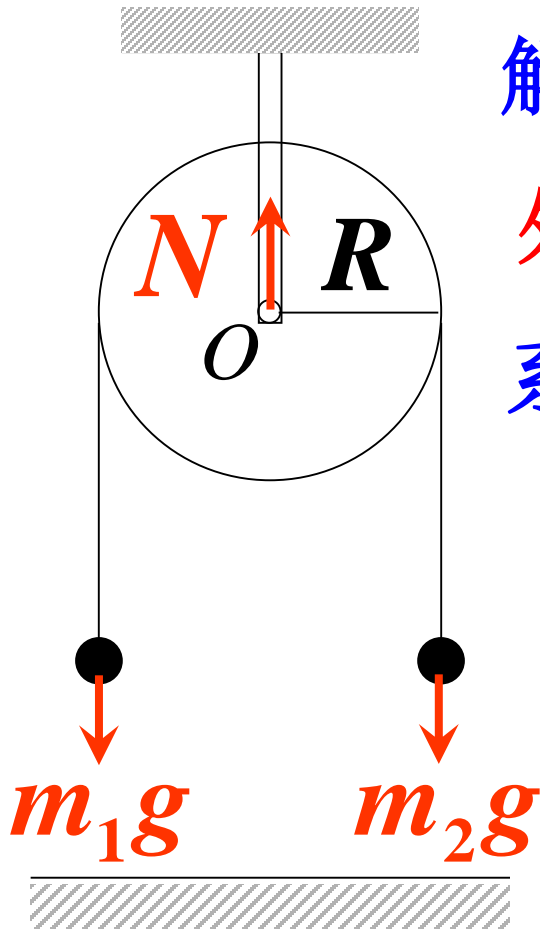


$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\text{人} = -\frac{M}{2m} \theta_\text{台} \\ |\theta_\text{人}| + |\theta_\text{台}| = 2\pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\text{台} = \frac{4\pi m}{M + 2m} \\ \theta_\text{人} = \frac{2\pi M}{M + 2m} \end{array} \right.$$

例6. 两个同样重的小孩，各自抓着跨过滑轮的轻绳的两端，如图。起初二人都不动，然后右边的小孩用力向上爬，而另一个小孩仍抓住绳子不动。若忽略滑轮的质量和轴的摩擦，问：哪一个小孩先到达滑轮？





解：对 “ $m_1 + m_2 + \text{轻绳} + \text{滑轮}$ ” 系统

外力： $m_1 \vec{g}$, $m_2 \vec{g}$, $\vec{N} \therefore \vec{M}_{\text{外}} = 0$

系统的角动量守恒

$$0 = L_1 + L_2$$

$$0 = m_1 R v_1 - m_2 R v_2 \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow v_1 = v_2$$

即他们对地的速度相同，故爬与不爬，两小孩同时到达滑轮！