



# 第 3 章

## 运动的守恒定律

# 运动的守恒定律:

- 动量定理与动量守恒
- 角动量定理和角动量守恒
- 功与机械能守恒定律

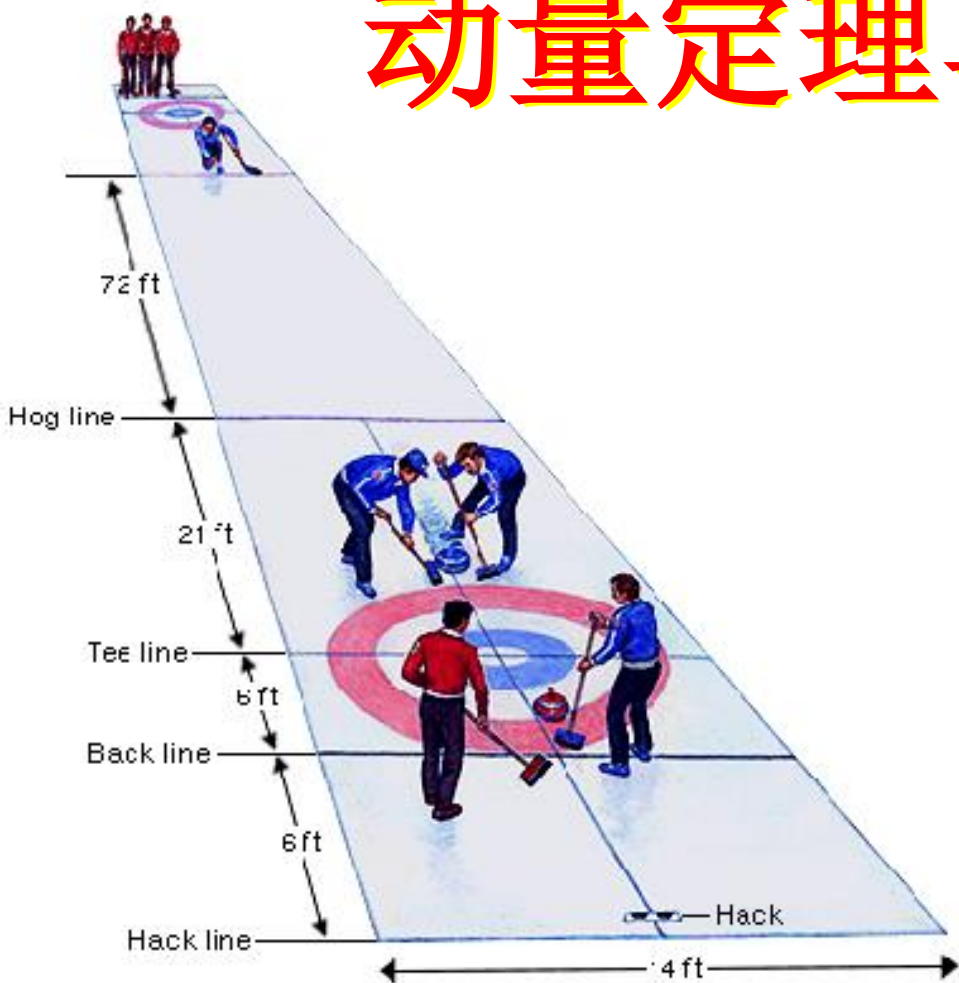


**Preview**

## § 3.1

# 动量定理与动量守恒

Curling Sheet



力的作用



运动状态改变

瞬时作用



速度改变

牛顿运动定律

时间积累



动量改变

动量定理

空间积累

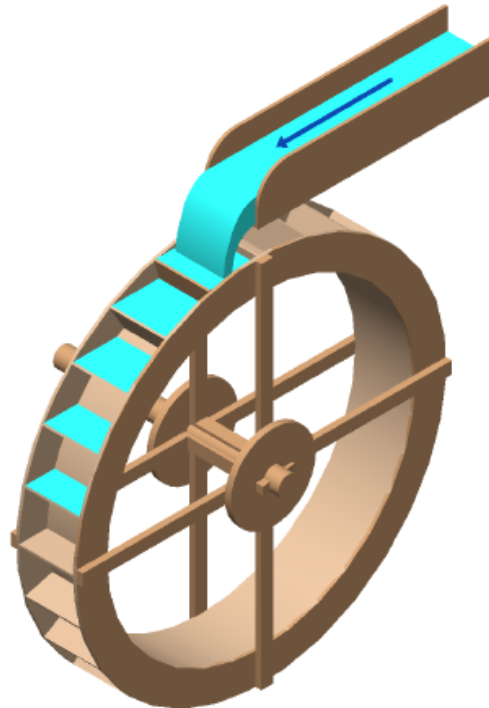
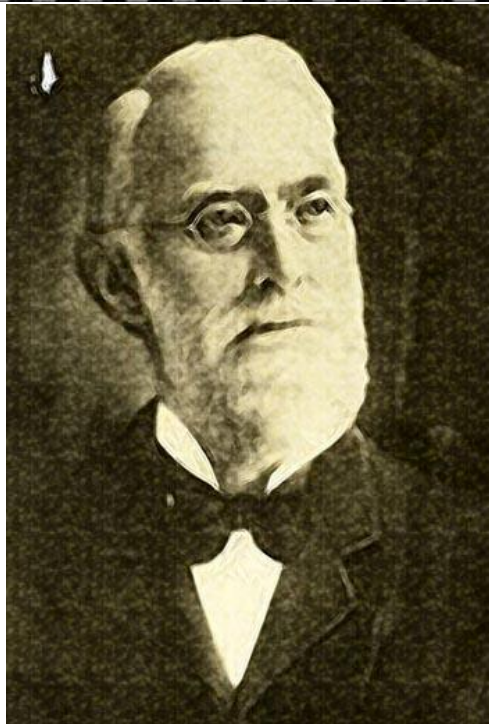
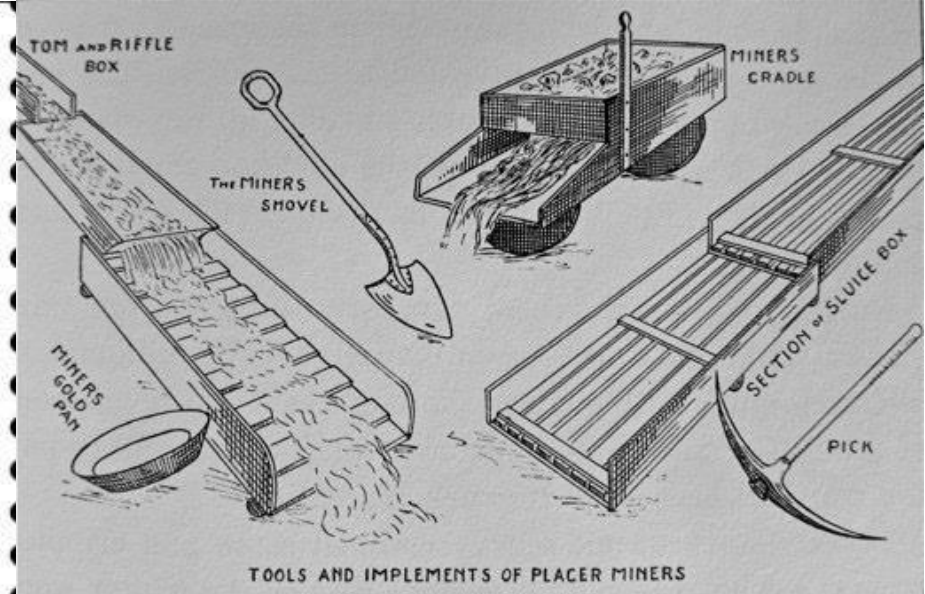


能量改变

动能定理



# CALIFORNIA GOLD RUSH 1849



Lester Allan Pelton

# 1. 冲量与动量

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad \vec{F}dt = d(m\vec{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d(m\vec{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

——力的冲量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

——质点的动量

## Note

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- 动量是矢量，方向为物体运动速度的方向；
- 动量是状态量，具有瞬时性；

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

- 冲量是矢量，瞬时冲量与力的方向相同；
- 冲量是过程量，是力的时间积累效果。



- 动量取决于质量与速度的组合:

滑下陡坡的无制动卡车       $Vs$       静止的卡车

缓慢行驶的巨轮       $Vs$       高速飞行的子弹

- 冲量的作用效果:

对于相同的动量变化, 力和时间的不同组合将产生不同的效果.





## 2. 质点的动量定理

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

● **质点的动量定理：**质点所受合外力的冲量等于质点动量的增量。

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{2x} - mv_{1x} \\ \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{2y} - mv_{1y} \\ \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

$$\vec{F} = \vec{C}$$

$$\begin{cases} F_x \Delta t = mv_{2x} - mv_{1x} \\ F_y \Delta t = mv_{2y} - mv_{1y} \\ F_z \Delta t = mv_{2z} - mv_{1z} \end{cases}$$

➤ 动量定理可以在某一方向上单独使用。

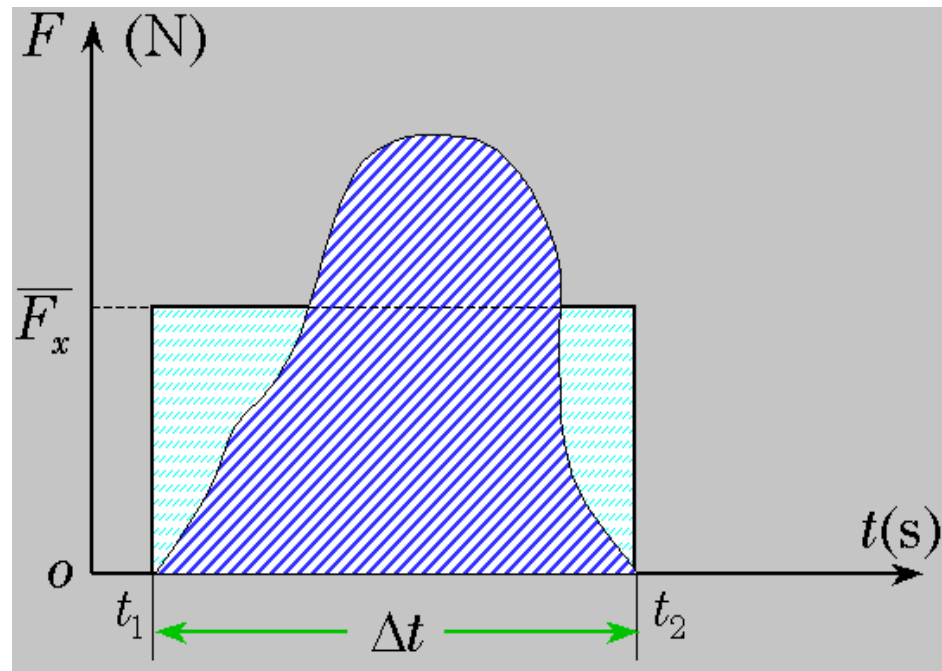
### 3. 平均冲力

**定义：**在相同时间内，若有一恒力的冲量与一变力的冲量相等，则这一个恒力称为这一变力的平均冲力。

$$\vec{F} \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot dt$$

$$\vec{F} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot dt$$

$$\vec{F} \Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$



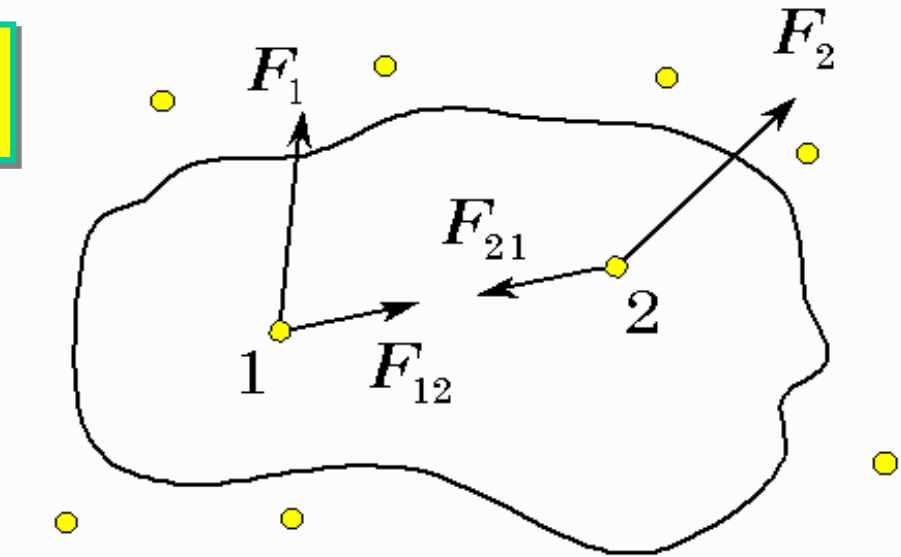
## 4. 质点系的动量定理

两质点体系:

内力:  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

外力:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

根据牛顿第二定律:



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

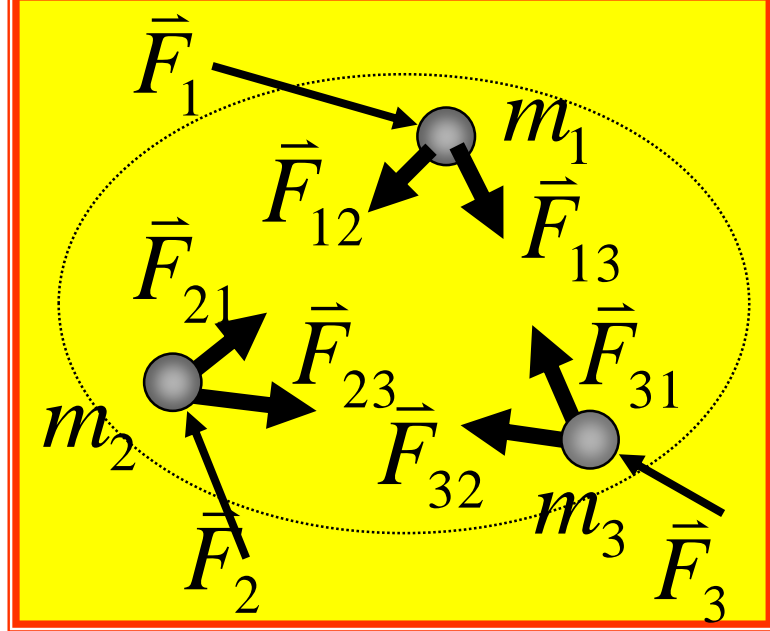
$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\vec{F}_1 + \cancel{\vec{F}_{12}} + \vec{F}_2 + \cancel{\vec{F}_{21}} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

### 三质点体系:

外力:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$

内力:  $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}, \vec{F}_{13}, \vec{F}_{31}, \vec{F}_{23}, \vec{F}_{32}$



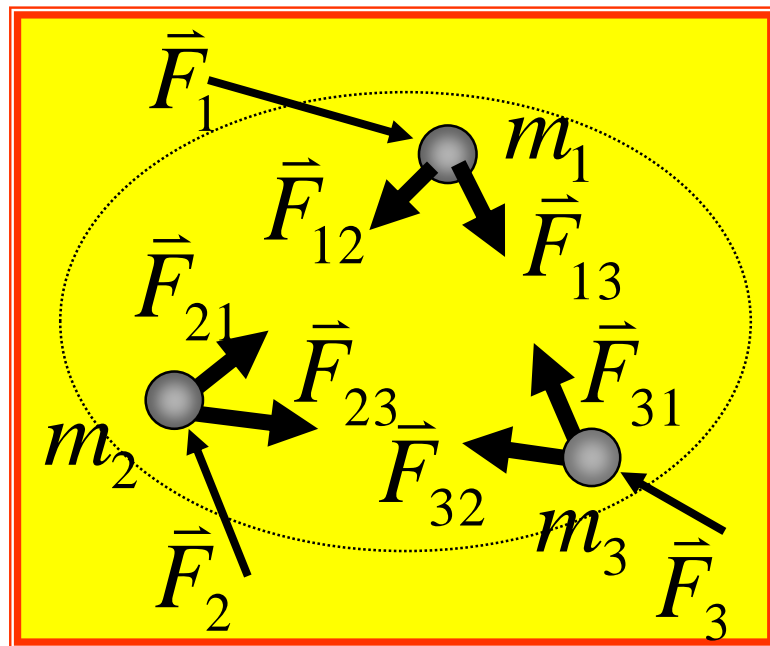
对质点1: 
$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1) = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

对质点2: 
$$\frac{d}{dt}(m_2 \vec{v}_2) = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$$

对质点3: 
$$\frac{d}{dt}(m_3 \vec{v}_3) = \vec{F}_3 + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{31}$$



$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) &= \vec{F}_1 + \cancel{\vec{F}_{12}} + \cancel{\vec{F}_{13}} \\ \frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) &= \vec{F}_2 + \cancel{\vec{F}_{21}} + \cancel{\vec{F}_{23}} \\ \frac{d}{dt}(m_3\vec{v}_3) &= \vec{F}_3 + \cancel{\vec{F}_{32}} + \cancel{\vec{F}_{31}} \\ \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3) &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\end{aligned}$$



$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

——质点系动量定理的微分形式

## 4. 质点系的动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n) dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 dt + \cdots + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_n dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{I}_i = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

● 质点系的动量定理：质点系所受外力的总冲量等于质点系总动量的增量。

**Note**

$$\sum_{i=1}^n \vec{I}_i = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

- 只有质点系的**外力**才能改变质点系的总动量；
- 内力虽能改变质点系个别质点的动量，但不能改变质点系的总动量。

## 5. 质点系的动量守恒定律

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \quad \text{If} \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{C}$$

- **质点系的动量守恒**：若质点系所受合外力为零，则质点系的总动量保持不变。

## Note

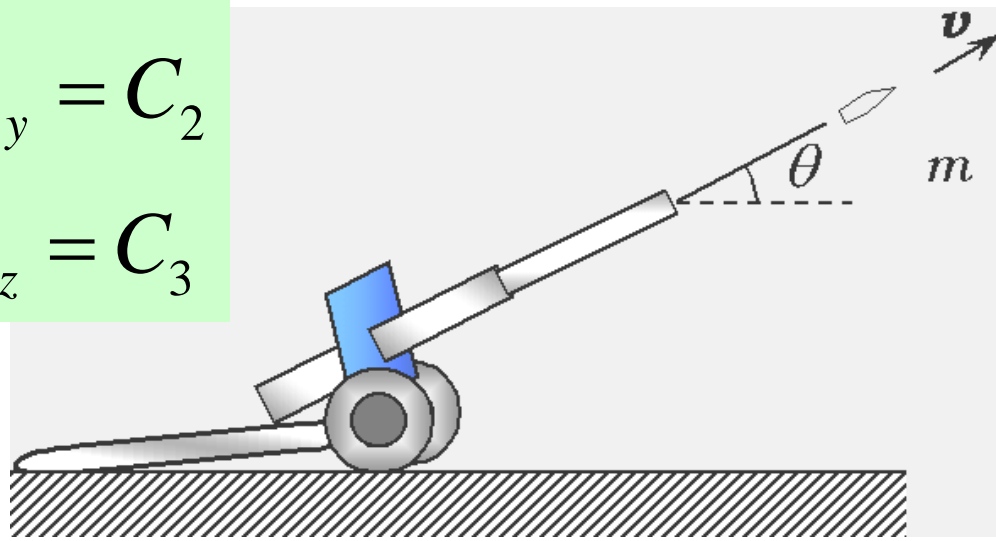
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{C}$$

- 动量是矢量，动量守恒意味着系统所有质点动量的矢量和保持不变；
- 动量守恒定理可以在某一方向上单独使用；某一方向上合外力为零，则该方向上动量守恒，而其他方向可以不守恒。

$$\text{If } \sum F_x = 0, \quad \text{then } \sum p_x = C_1$$

$$\text{If } \sum F_y = 0, \quad \text{then } \sum p_y = C_2$$

$$\text{If } \sum F_z = 0, \quad \text{then } \sum p_z = C_3$$

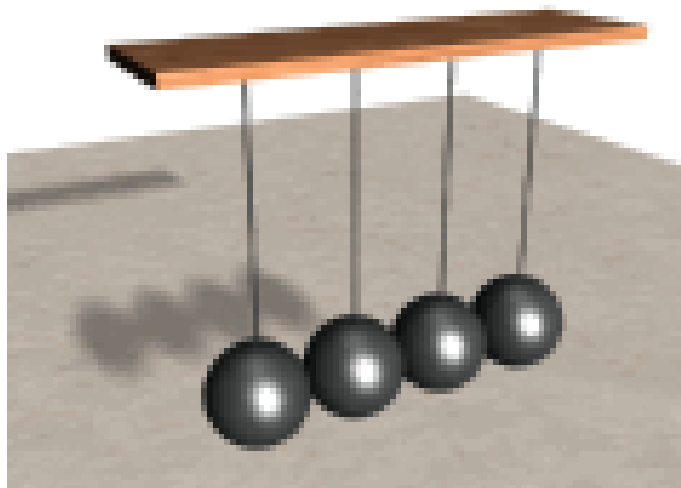




# Note

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{C}$$

➤ 如果外力 $\ll$ 内力，可以认为系统的总动量守恒，例如碰撞、爆炸等过程。



## Note

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{C}$$

- 动量定理及动量守恒定律只适用于惯性系；动量若在某一惯性系中守恒，则在其它一切惯性系中均守恒.
- 动量守恒定律是关于自然界一切过程的一条基本定律，并不依赖牛顿定律.
- 动量守恒定律适用于：  
宏观物体系、微观粒子系统和电磁场.
- 应用动量守恒定律解题时，不必了解过程的中间状态情况，而只须考虑系统的始末状态.

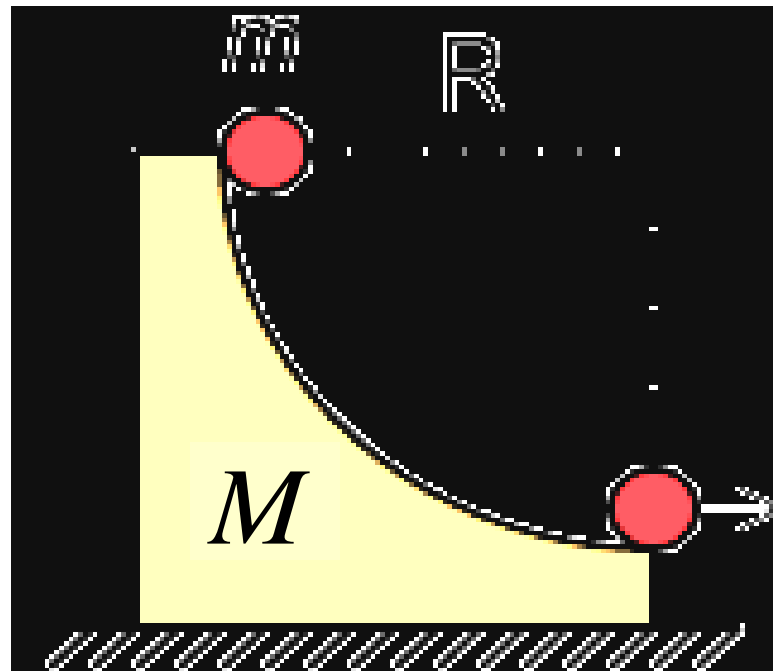
**例：**质量为 10 kg 的物体，受到力  $\vec{F} = 5t\hat{i} + 2t\hat{j}$  (SI) 的作用，在  $t=0$  时，物体静止在原点。求 (1) 物体在  $t=10$  s 时的动量；(2) 从  $t=0$  到  $t=10$  s 内作用力的冲量。

**解(2)：** 
$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt = \int_0^{10} (5t\hat{i} + 2t\hat{j}) dt$$
$$= \frac{5}{2} t^2 \hat{i} + t^2 \hat{j} \Big|_0^{10} = 250\hat{i} + 100\hat{j} \quad (\text{N} \cdot \text{s})$$

**(1)：** 
$$\because \vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt = \vec{p} - 0$$

$$\therefore \vec{p} = \vec{I} = 250\hat{i} + 100\hat{j} \quad (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

**例：**质量为  $m$  的小球沿光滑圆弧面滚下，圆弧斜面  $M$  与地面间光滑。小球从斜面顶静止开始滚下。求小球滑到底时， $M$  平移的距离。





小球下滑时，球和斜面系统在水平方向合外力为零，动量在水平方向守恒

$$mv_x + M(-V) = 0$$

$$\therefore V = \frac{mv_x}{M}$$

$$S = \int_0^t V dt = \frac{m}{M} \int_0^t v_x dt = S$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{m}{M} s \\ s &= R - S \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore S = \frac{m}{m+M} R$$

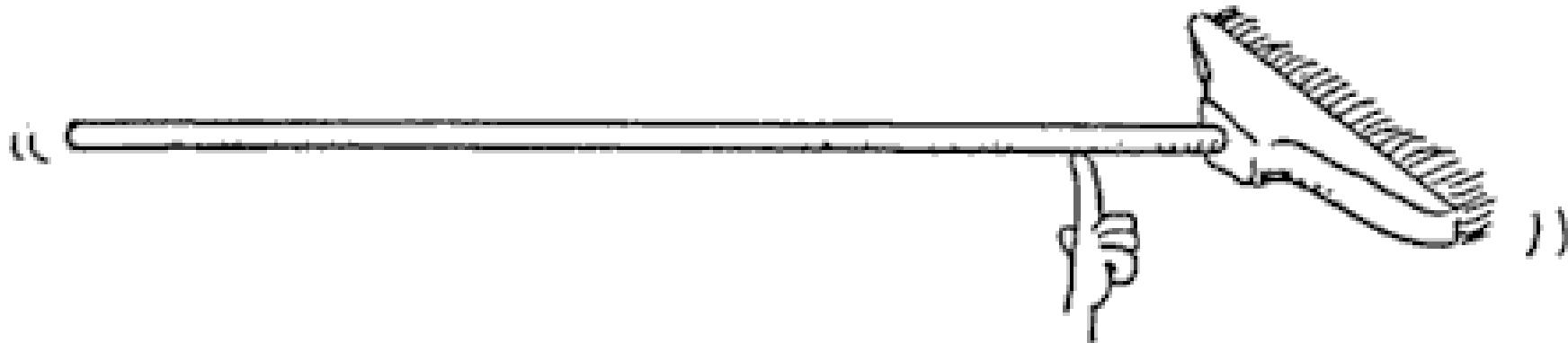
**例.** 一条小船静止于湖面，一个质量为  $m=50\text{kg}$  的人从船头走向船尾。船的质量为  $M=200\text{kg}$ ，长度为  $L=4\text{m}$ 。求船移动的距离。

动量守恒：

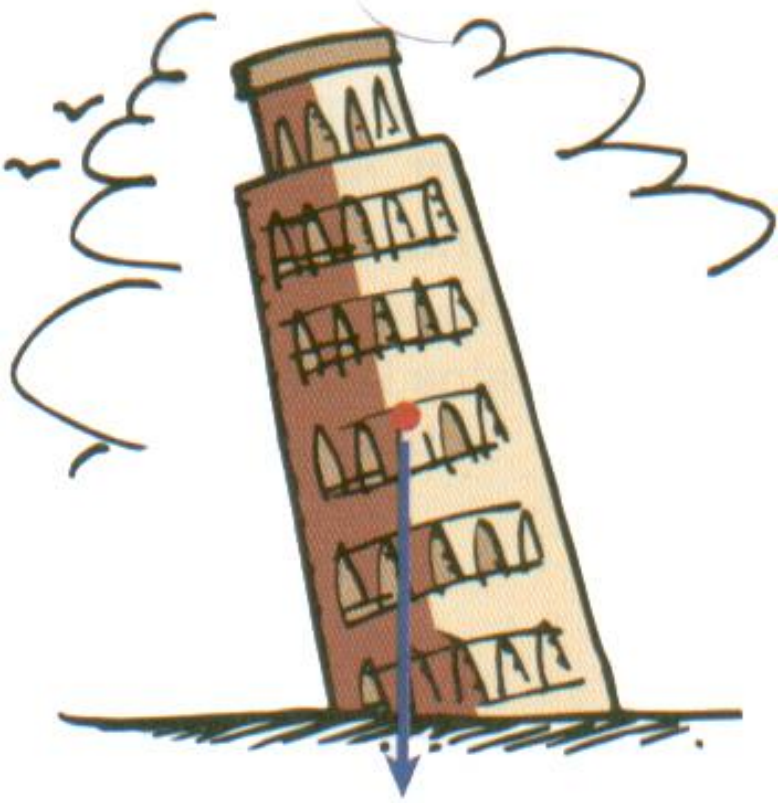
$$mv - MV = 0$$

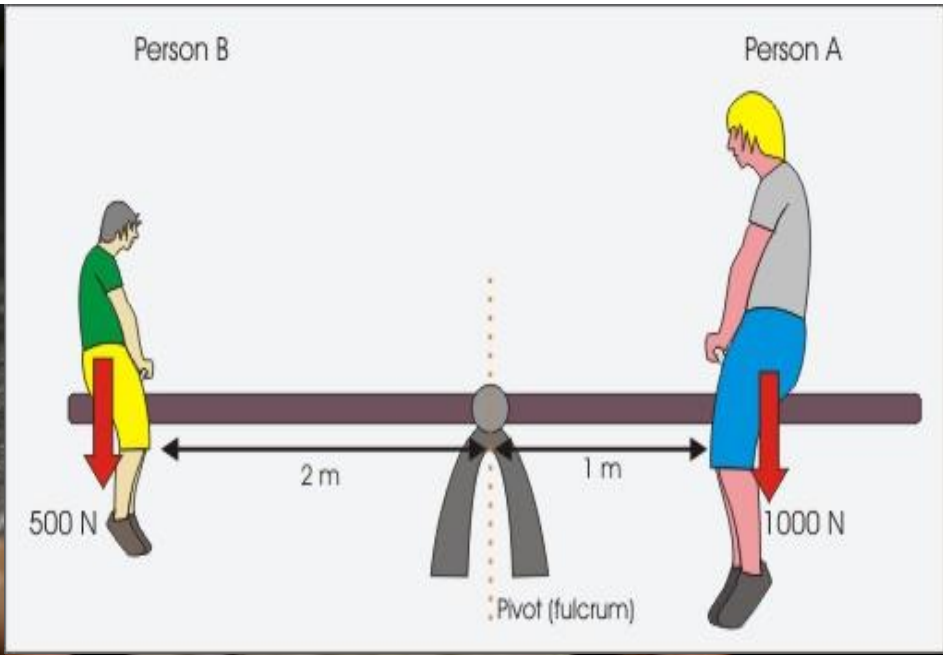
$$D = \int_0^t V dt = \frac{m}{M} \int_0^t v dt = \frac{m}{M} d$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D}{d} = \frac{m}{M} \\ d + D = L \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d = \frac{M}{M+m} L \\ D = \frac{m}{M+m} L = 0.8\text{m} \end{array} \right.$$



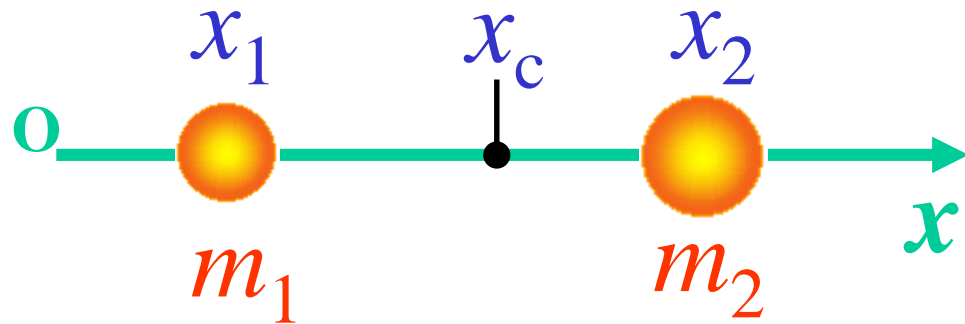
# 质心和质心运动定理







## ● 两质点系统的质心:



$$x_c \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

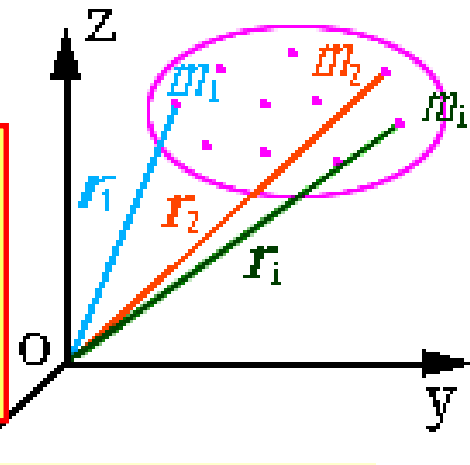
如果:  $m_1 = m_2$

$$x_c \equiv \frac{x_1 + x_2}{2}$$

- 质心距离质量较大的质点较近;
- 如果两质点质量相等, 则质心位于两质点连线中点。

## ● 三维坐标下的多质点系统的质心:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

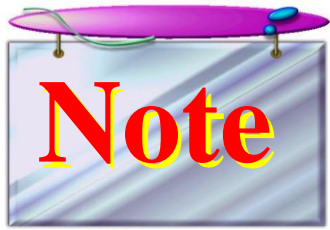


$$\vec{r}_c = x_c \vec{i} + y_c \vec{j} + z_c \vec{k}$$

## ● 质量连续分布:

$$\vec{r}_c = \frac{\int_m \vec{r} dm}{\int_m dm}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \\ y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \\ z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \end{array} \right.$$



$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

$$\vec{r}_c = \frac{\int_m \vec{r} dm}{\int_m dm}$$

- 质心的位置只决定于质点质量和系统质量分布.
- 质心是相对于质点系的一个特定位置，不会随坐标系而改变.
- 几何尺寸不太大的物体，其质心与重心重合.
- 质心是质元位置的加权平均值，因此质心处不一定有质量.

台北101 (509米)



调质阻尼器 (660吨)



## ● 质心的动量

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$M\vec{v}_C = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{p}$$

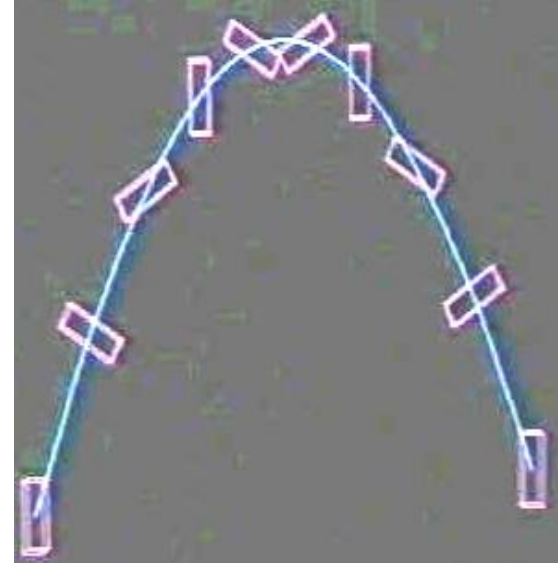
➤ 质点系的总动量等于质点系的总质量与质心速度的乘积。

# ● 质心运动定理

$$\because M\vec{v}_C = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{p}$$

$$\therefore \sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = M\vec{a}_C$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_C = \frac{d\vec{p}}{dt}$$



➤ 作用在质点系的合外力的效果相当于作用在质心上.

$$\text{If } \sum \vec{F}_{ext} = 0, \text{ then } \vec{a}_C = 0$$

➤ 如果作用在质点系的合外力为零，则质心的加速度为零.



## Note

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_c = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- 质心的运动就像一个质点的运动；
- 只有外力才能改变质心的运动状态，质点系的内力不能改变质心的运动状态；
- 质心定理为质点动力学提供了严格的依据；
- 质心运动定理适用于一切质点系——无论是离散形的还是连续形的。